ESAME DI ANALISI MATEMATICA 3

Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2018/2019

Docente: Prof. Berardino Sciunzi

SVOLGERE 4 DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1 (7,5 punti) Dire se

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \; y + x = 0\right\}$$

è una varietà di $\mathbb{R}^3$; determinare il punto $p \in M$ che abbia minima distanza dal punto $p_0 = (0, 2, 0)$.

Esercizio 2 (7,5 punti) Si consideri nello spazio il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (z^3 \, , \, y^3 \, , \, x^3) \, .$$

Calcolare il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso la sfera centrata nell'origine e di raggio 4.

Esercizio 3 (8,5 punti) Dimostrare che, per ogni $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \, v \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} u \, \Delta \, v \, dx$$

Esercizio 4 (7,5 punti) Si consideri in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) dy$$

(a) Dire se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma^+} \omega$ dove γ è la circonferenza centrata in $(0, 2)$ di raggio 4.

Esercizio 5 (7,5 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega x^2 \, e^{(x^2+y^2)} \, dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4 \, , \; y \geq |x|\}.$$